Feuille de calcul n°3 — Calcul de limites

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer la limite de (u_n).

1. $u_n = 3n^2 - 7n + 3$ **2.** $u_n = \dfrac{2n^3+7}{5n^3+1}$ **3.** $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}$ **4.** $u_n = \sqrt{n^2+2} - n$

5. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \times \exp(n)$ **6.** $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}}$ **7.** $u_n = 3^n + \dfrac{1}{2^n}$ **8.** $u_n = 3^n - 2^n$

Exercice 2. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n^2}}{n+1}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

2. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 3. Étudier le comportement asymptotique des suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n + \sin n$ et $v_n = (-1)^n - n$.

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

2. Justifier que (u_n) est majorée par 2.

3. Conclure que (u_n) est convergente.

Exercice 5. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant n$. (On rappelle que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.)

2. En déduire la limite de (v_n).

Exercice 6. Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites suivantes :

a. $u_n = n^2 - n$ **b.** $u_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$ **c.** $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

d. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ **e.** $u_n = \sqrt{n^2+1} + n$ **f.** $u_n = \dfrac{\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n^3}} - 1}$

g. $u_n = \mathrm{e}^n - n^e$ **h.** $u_n = \sqrt{n} - [\ln(n)]^{\frac{1}{2}} + \sin(n)$ **i.** $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$

j. $u_n = \sin\left(\dfrac{3n+4}{(n+1)^2}\right)$ **k.** $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ **l.** $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Exercice 7. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

2. Montrer que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ est géométrique.

3. En déduire le terme général de (u_n) ainsi que sa limite.